МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА

ЛЕКЦИИ И ЗАДАЧИ

VIII

ИЗДАТЕЛЬСТВО МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА · 1966

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

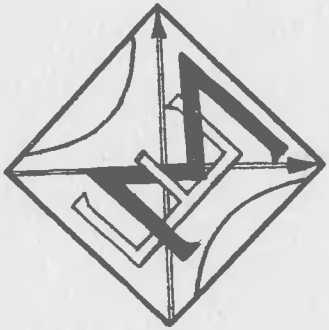
МОСКОВСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

ИНСТИТУТ ОБЩЕГО И ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК РСФСР

М А Т Е М А Т И Ч Е С К А Я Ш К О Л А

ЛЕКЦИИ И ЗАДАЧИ

У Ш



Издательство Московского Университета
1966

В сборниках " Математическая школа " публикуются материалы преподавания математики в специализированных математических школах (Московские школы №№ 2, 7, 444; школа-интернат № I8 при МГУ) и в Вечерней математической школе при механико-математическом факультете МГУ. Материалы имеют экспериментальный характер. Руководит изданием редакционный совет в составе:

Э.Б.ВИНБЕРГ, Е.Б.ДЫНКИН (редактор), А.А.ЕГОРОВ,
С.А.МОЛЧАНОВ (зам.редактора), С.И.ШВАРЦБУРД,
И.М.ЯГЛОМ .

ОГЛАВЛЕНИЕ

В ВЕЧЕРНЕЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ШКОЛЕ

Конкурс ВМШ 3-7

Новые задачи .....

Решения конкурсных задач 8-13

7 - 8 классы (С.Молчанов) .....

ЛЕКЦИИ ВМШ

В.И.Левин. Неравенство Бернулли и монотонные последовательности ..... 14-17.

Э.Э.ШНОЛЬ Решение уравнений ..... 18-23.

В ШКОЛЕ № 2

А.Б.Каток, И.Д.Новиков. Контрольные задачи по теме " Комплексные числа и геометрические преобразования " 24-26

А.Б.Каток. Теорема о промежуточном значении, компактность множеств, теорема о максимуме непрерывной функции (задачи) 27-34

А.Н.Колмогоров. Одна проблема из теории кривых 35

Программа выпускного экзамена по алгебре и началам анализа для 10-х классов школы № 2 с математической специализацией 36-39

ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЭКЗАМЕНАМ

Дополнительные варианты 40-41

Задачи для подготовки к экзаменам по математике (задачи по стереометрии) 42-53

О приеме в физико-технический институт в 1965 г. 54-58

2-1686

КОНКУРС ВЕЧЕРНЕЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ШКОЛЫ

7-е классы

51. Доказать, что любой треугольник можно разрезать тремя прямолинейными разрезами на части и передвинуть эти части по плоскости так, что они составят треугольник, зеркально симметричный данному.

52. На клетчатой бумаге нарисована некоторая фигура, состоящая из клеток. Двое играют в "крестики-нолики" на этой фигуре по следующим правилам: выигрывает тот, кому удолось поставить три своих значка в ряд или по диагонали ; если это не удалось никому, считается, что игра закончилась вничью. Какое наименьшее число клеток может содержать фигура, чтобы начинающий мог выиграть, как бы ни играл его противник ? (построить пример такой фигуры с минимальным числом клеток и доказать, что на любой фигуре с меньшим числом клеток второй участник может предотвратить победу начинающего).

53. Найти все выпуклые центрально-симметричные фигуры площади I, внутри которых содержится треугольник площади I/2.

54. На столе лежат I5 журналов, полностью закрывая его. Доказать, что можно убрать 7 журналов так, чтобы оставшиеся закрывали не менее 8/I5 площади стола.

55. Стороны выпуклого многоугольника периметра P отодвигаются каждая на I см. . Доказать, что при этом площадь увеличится более, чем на $P + \pi$.

56. Доказать, что уравнение $X^2 - y^2 = 1966$ не имеет решений в целых числах.

57. В клетках прямоугольной таблицы расставлены положительные числа так, что сумма чисел строки, умноженная на сумму чисел столбца, равна числу, стоящему на их пересечении. Доказать, что сумма всех чисел таблицы равна I.

58. Обозначим n -е простое число через P_n . Доказать, что если $n \geq 12$, то $P_n \geqslant 3n$.

59. Доказать, что если у вписанного четырехугольника одна из диагоналей является диаметром описанной окружности, то проекции противоположных сторон четырехугольника на другую диагональ равны.

8 -е классы

51. Дана правильная треугольная пирамида (правильный тетраэдр). Как его нужно расположить в пространстве, чтобы его перпендикулярная проекция на данную плоскость имела максимальную площадь?

52. Каждая сторона правильного треугольника разделена на равных частей и через точки деления проведены отрезки, параллельные сторонам треугольника, так, что треугольник оказался разделенным на маленькие треугольники. В каждый из этих треугольников записано число +I или -I, причем число, стоящее в любом треугольнике, равно произведению чисел, стоящих в смежных треугольниках. Доказать, что в угловых треугольниках стоят одинаковые числа.

53. Найти все центрально-симметричные фигуры (выпуклые) площади I, внутри которых содержится треугольник площади I/2.

ЗАДАЧИ ПО АЛГЕБРЕ ЛОГИКИ -

С.Г.ГИНДИКИН

I. Выразить все основные операции алгебры логики через:

а/ $X \vee Y$, XY, $\overline{X}$

б/ $X \vee Y$, $\overline{X}$

в/ XY, $\frac{1}{X}$

г/ $\overline{X}\,\overline{Y} = X \vee Y$

(функция Шеффера)

2. Выразить $X \vee Y$ через $X \to Y$.

3. Сколько имеется логических операций над n высказываниями, сохраняющих ложные высказывания $/f(0,0,..0)=0/$.

4. Сколько имеется симметрических логических операций на 2-мя высказываниями; n - высказываниями (значение истинности сложного высказывания не меняется при любой перестановке простых высказываний).

5. Выразить через дизъюнкцию, конъюнкцию и отрицание (например, строя СДНФ) :

а) функцию от трех переменных, равную I, если большинство переменных равно I.

б) функцию от четырех переменных, равную I, если четное число переменных равно I.

6. Представить в виде СДНФ все основные операции.

7. Показать, что не всякую функцию алгебры логики можно выразить через : а) XY, $X \vee Y$

б) $X \to Y$

8.* Какие из функций $X_1 \vee X_2 \vee \ldots \vee X_k \vee \overline{X}_{k+1} \ldots \vee \overline{X}_n$ можно выразить через XY, $X \vee Y$, $X \to Y$.

9.* Описать класс функций, которые можно выразить через XY, $X \vee Y$, $X \to Y$

I0. Представить полиномами Жегалкина :

а) основные логические операции ;

б) $X \vee Y \vee Z$, в) $XY \vee YZ \vee XZ$

г) $XY\overline{Z} \vee X\overline{Y}Z \vee \overline{X}YZ \vee XYZ$

II. Сколько имеется линейных функций от n переменных?

I2. Какие из основных логических операций являются положительными функциями? Какие из линейных функций?

I3. Перечислить все монотонные функции от двух переменных.

14. Показать, что всякая монотонная функция, не сохраняющая нуля (см.задачу № 3), равна тождественно единице.

15.* Показать, что всякая монотонная функция, не являющаяся константой, выражается через дизъюнкцию и конъюнкцию.

16.* Какие из перечисленных ниже систем слабо полны:

а) $X+Y+Z,\ XY$ б) $X \to Y$ в) $XY,\ X \vee Y$

г) $X+Y,\ X$ д) $XY \vee YZ \vee XZ$

17.* Доказать общую теорему Поста (формулировка в конспекте).

18.* Найти все замкнутые относительно расширенной суперпозиции системы функций алгебры логики.

Примечание : Объяснение всех употребляемых терминов содержится в конспекте лекций (см."Математическая школа" вып. VII).

РЕШЕНИЯ КОНКУРСНЫХ ЗАДАЧ

С. МОЛЧАНОВ

В двух предыдущих номерах были опубликованы решения большинства задач первого цикла конкурса ВМШ. Ниже приводятся решения остальных задач.

7 класс

I4. Груз весом I3,5 тонн упакован в ящики. Каждый ящик весит не более 350 кг. Какое наибольшее количество полуторатонных грузовиков понадобится для перевозки этого груза ? (Запрещается распаковывать ящики и перегружать грузовики).

Решение. Покажем, что груз всегда можно уложить на II грузовиков. Для этого рассортируем ящики на две группы: к первой группе отнесем все ящики, вес которых больше 300 кг., ко второй - остальные ящики (вес каждого из них не больше 300 кг). Сначала будем грузить машины ящиками первой группы (пока это возможно). На каждую машину можно положить при этом по 4 ящика и недогрузка не будет превосходить 300 кг. Если останется меньше 4-х ящиков первой группы, то положим их на одну машину и добавим любое допустимое количество ящиков из 2-й группы. Эта машина будет весить не менее I,2 тонны. Оставшиеся ящики 2-й группы можно размещать на машинах так, чтобы недогрузка не превосходила 300 кг. Допустим, что мы уже уложили груз на I0 грузовиков. Общий вес этого груза не меньше I,2 .I0 = I2 (тонн) . Оставшийся груз, не превосходящий I3,5 - I2 = I,5 (тонн) можно положить на II-й грузовик.

Легко показать, что груз, состоящий из 43 ящиков весом по 310 кг и одного ящика весом I70 кг, полный вес которого равен I3,5 тонн, на I2 грузовиках увезти уже нельзя (с соблюдением указанных в условии задачи требований).

23. Даны три точки A, B, C . Провести прямую, пересекаю-

щую AC в точке x и BC в точке y так, чтобы $Ax = xy = yB$.

Решение. Условие задачи допускает два толкования, которые поясняются рисунками I и 2.

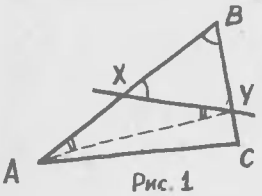


Рис. 1

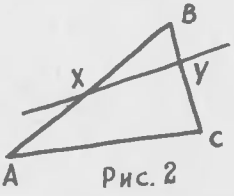


Рис. 2

Задача, которая получается при использовании рис. I довольно простая (именно ее и решали большинство участников конкурса).

В самом деле, треугольники xyB и Axy равнобедренные. Отсюда легко вывести, что $\angle xyA = \angle xAy = \frac{1}{2}\angle Bxy = \frac{1}{2}\angle B$, после чего построение не представляет никаких затруднений.

В то же время, решение второго варианта задачи (рис. 2) далеко не очевидно и требует более тонких рассуждений. Для полноты картины приведем и это решение.

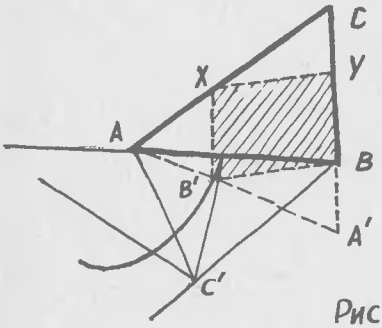


Рис. 3

Допустим, что построение уже проведено. Продолжим сторону CB за вершину B и отложим $CA' = CA$. Кроме того, проведем отрезок xB', равный и параллельный yB (см. рис. 3). Легко показать, что точка B' лежит на AA'. Кроме того $\frac{AB'}{B'B} = \frac{AB'}{xB'} = \frac{AA'}{AC}$

(мы воспользовались тем, что треугольники AxB' и ACA' подобны и тем, что четырехугольник $xyBB'$ – ромб).

Лемма. Геометрическое место точек, отношения расстояний которых до двух заданных точек A и B равно постоянной K, есть окружность (окружность Апполония). Диаметр этой окружности

лежит на прямой, проходящей через точки A и B. При этом $\frac{\mathcal{F}_2A}{\mathcal{F}_2B}=\frac{\mathcal{F}_1A}{\mathcal{F}_1B}=\frac{MA}{MB}=K$.

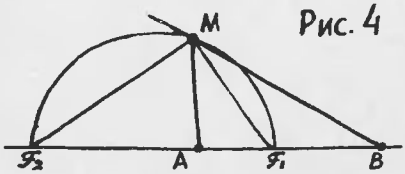


Рис. 4

(см.рис. 4). Доказательство этой леммы можно найти в различных книгах. (См., например, книжку Е.Б.Дынкина и др. " Математические задачи", стр. 66.)

Теперь мы в состоянии найти точку B'. В самом деле, она лежит на пересечении прямой AA' и окружности Апполония, построенной для точек A и B по известному отношению $K=\frac{AA'}{AC}$.

Отметим, что после того, как точка B' найдена, завершить построение очень просто: надо провести $B'x$ параллельно CB и xy параллельно $B'B$.

Как проще всего построить требуемую окружность Апполония? Можно предложить такой способ (см.рис.3) : построим треугольник ABC' так, чтобы $AB=BC'$ и $\angle ABC'=\angle C$ и проведем в этом треугольнике биссектрисы внешнего и внутреннего углов при вершине C'. Если $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ точки пересечения этих биссектрис с прямой AB, то $\mathcal{F}_1\mathcal{F}_2$ -диаметр искомой окружности. Предлагаем читателям самим обосновать это построение .

8 класс

№ 16. Рассматривается прямоугольная таблица, составленная из $K\times n$ клеток. Под каждым столбцом и возле каждой строки подписано одно число. При этом все числа, подписанные под столбцами, составляют в сумме столько же , сколько и все числа, стоящие возле строк. Докажите, что в клетки таблицы можно вписать $K+n-1$ чисел так, чтобы сумма чисел в каждом столбце и в каждой строке была равна числу, сопоставленному этому столбцу или этой строке .

Одно из решений изображено на рисунке:

	b_1	b_2	.	.	.	.	.	b_n
a_1	0	0	0	0	.	.	.	a_1
a_2	0	0	0	0	.	.	.	a_2
	.	.	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.	.	.
a_k	b_1	b_2	b_3	b_4	.	.	.	a_k+b_n-S

Здесь $S=a_1+\ldots+a_k=b_1+b_2+\ldots+b_n$

I9 . На доске нарисовано несколько окружностей, квадратов и треугольников. Разрешается стереть любые две фигуры, нарисовав вместо них третью по правилу: вместо пары окружностей – одну окружность, вместо пары квадратов треугольник, вместо пары треугольников квадрат, вместо окружности и квадрата квадрат, вместо окружности и треугольника треугольник, вместо треугольника и квадрата окружность. Доказать, что форма фигуры, которая останется последней, не зависит от того, в каком порядке стираются фигуры.

Решение. Обозначим окружность, квадрат и треугольник буквами O, K, T . Операцию замены двух фигур третьей будем обозначать кружочками. Условие задачи теперь можно записать в таком виде

$$O \circ O = O \qquad O \circ K = K \circ O = O$$
$$O \circ T = T \circ O = T \qquad (I)$$
$$K \circ K = T,\ T \circ T = K,\ T \circ K = K \circ T = O.$$

Из этой таблицы видно, что операция коммутативна. Нетрудно показать, что она ассоциативна, т.е. для любых фигур A, B и C (каждая из этих букв может означать либо O, либо T, либо K) выполняется соотношение

$$(A \circ (B \circ C)) = ((A \circ B) \circ C). \qquad (2)$$

Проверку этого факта мы предоставляем читателям. Теперь мы должны доказать, что если даны фигуры $A_1, A_2, \ldots, A_n$, то фигура, которая останется последней не зависит от способа группировки этих фигур и их порядка. Оказывается, что при любом способе действий мы всегда получим фигуру

$$\underbrace{(O \circ \ldots \circ O)}_{n_1} \circ \underbrace{(T \circ \ldots \circ T)}_{n_2} \circ \underbrace{(K \circ \ldots \circ K)}_{n_3}$$

где n_1 – число окружностей среди $A_1, A_2, \ldots, A_n$;

n_2 – число треугольников среди $A_1, A_2, \ldots, A_n$;

n_3 – число квадратов среди $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

При $n=3$ это следует из формул (I) и (2). Индуктивный переход от n к $n+1$ не составляет труда.

24. Доказать, что каждая правильная дробь $\frac{a}{b}$ может быть представлена в виде

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_1 q_2} + \ldots + \frac{1}{q_1 \ldots q_n},$$

где $q_1, \ldots, q_n$ – целые числа, большие I.

Решение. Обозначим через q_1 наименьшее целое число, такое, что $q_1 \cdot a/b \geq 1$. Пусть $\frac{a_1}{b_1} = q_1 \cdot \frac{a}{b} - 1$ и пусть q_2 – наименьшее целое число, такое, что $q_2 \cdot \frac{a_1}{b_1} \geq 1$. Введем $\frac{a_2}{b_2} = q_2 \frac{a_1}{b_1} - 1$. Аналогично предыдущему строится число q_3, затем дробь $\frac{a_3}{b_3}$ и т.д. Заметим, что $\frac{a}{b} > \frac{a_1}{b_1} > \frac{a_2}{b_2} > \dots$.

Кроме того, знаменатели этих дробей не превосходят b. Поэтому описанный выше процесс оборвется через конечное число шагов, т.е. найдется такое n, что $q_n \cdot \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} = 1$.

Имеем соотношения

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_1} \cdot \frac{a_1}{b_1}$$

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_2} \cdot \frac{a_2}{b_2}$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots$$

$$\frac{a_{n-2}}{b_{n-2}} = \frac{1}{q_{n-1}} + \frac{1}{q_{n-1}} \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}$$

$$\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} = \frac{1}{q_n}.$$

Произведя последовательные замены, получим

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_1 q_2} + \dots + \frac{1}{q_1 \dots q_n}.$$

Отметим, что мы попутно доказали единственность такого представления.

НЕРАВЕНСТВО БЕРНУЛЛИ И МОНОТОННЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

В.И.ЛЕВИН

Неравенство Бернулли, которое мы доказываем ниже в форме леммы, принадлежит к числу основных неравенств алгебры и математического анализа; оно просто доказывается и весьма широко применяется.

Лемма. Если $u>-1$ и $u\neq 0$, а n – натуральное число, то

$$(1+u)^n > 1+nu,$$

причем равенство имеет место только при $n=1$.

Доказательство. Применим метод полной математической индукции. При $n=1$ имеем: $(1+u)^1 = 1+1\cdot u$. Допустим, что лемма справедлива для $n=k$, т.е. что имеет место неравенство

$$(1+u)^k > 1+ku$$

(для $u>-1$ и $u\neq 0$). Помножим это неравенство на положительное число $1+u$, и найдем, что тогда

$$(1+u)^{k+1} > (1+ku)(1+u) = 1+(k+1)u+ku^2 > 1+(k+1)u$$

уже с строгим знаком неравенства, так как $u\neq 0$. Утверждение леммы теперь следует: при $n=1$ оно проверено (имеет место равенство), следовательно, по доказанному при $k=1$, оно имеет место и для $n=2$ с строгим знаком неравенства; полагая теперь $k=2$, мы получим утверждение леммы для $n=3$ и т.д.

Мы применим сейчас неравенство Бернулли к изучению последовательности $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n=1,2,3,\ldots$, которая играет важную роль в математическом анализе. Именно, мы покажем что эта последовательность возрастающая, т.е. что для любого

натурального числа n :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}. \qquad /A/$$

Для этого рассмотрим отношение правой части этого неравенства к левой, т.е. выражение

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{(n+2)^{n+1}\cdot n^n}{(n+1)^{2n+1}} = \frac{n+2}{n+1}\cdot\left[\frac{(n+2)n}{(n+1)^2}\right]^n;$$

так как

$$\frac{(n+2)n}{(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2} = 1-\frac{1}{(n+1)^2},$$

то по лемме при $u=-\frac{1}{(n+1)^2}$ (заметим, что это $u>-1$ и $u\neq 0$)

$$\left[\frac{(n+2)n}{(n+1)^2}\right]^n = \left[1-\frac{1}{(n+1)^2}\right]^n \geqslant 1-\frac{n}{(n+1)^2} = \frac{n^2+n+1}{(n+1)^2},$$

и ,следовательно,

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \geqslant \frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{n^2+n+1}{(n+1)^2} = \frac{n^3+3n^2+3n+2}{(n+1)^3} = \frac{n^3+3n^2+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1} > 1,$$

что и требовалось доказать.

Совершенно аналогично можно показать, что последовательность $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, $n=1,2,3,\ldots$ убывает, т.е. что

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2} \qquad /B/$$

(проведите это доказательство сами).

Теперь мы можем доказать, что для любого натурального числа n

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 4.$$

Это следует из двух фактов; во-первых, из очевидного неравенства

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

(так как основание $1+\frac{1}{n}>1$), и во-вторых, из того, что число $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ тем больше, чем меньше n (это неравенство (В) , которое Вы сами должны доказать), т.е. во всяком случае

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} < 4.$$

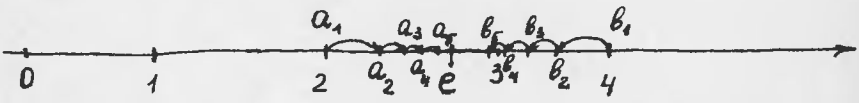
Таким образом, действительно мы можем записать:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} < 4$$

Точно так же докажем, что для любого натурального числа n

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geqslant 2.$$

Как ведут себя рассматриваемые нами две последовательности ? Введем для краткости обозначения: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = a_n$, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = b_n$. Заставим n последовательно принимать значения $1, 2, 3, \ldots$, и проследим, как перемещаются при этом точки a_n и b_n на числовой оси . Они начинают свои прыжки из точек $a_1=2$ и $b_1=4$ (см.чертеж).



и прыгают навстречу друг другу, но после каждого прыжка точка a_n остается левее точки b_n . Расстояние между ними

$$b_n - a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < \frac{4}{n}$$

неограниченно уменьшается (стремится к нулю при $n \to \infty$). Можно поэтому утверждать, что a_n и b_n приближаются с разных сторон к одной и той же точке (их общему пределу при $n \to \infty$). Число, соответствующее этой точке числовой оси, обозначается буквой e (приближенное значение: 2, 71828). Нас ,однако, здесь интересует другое обстоятельство. Из выясненного нами поведения последовательностей a_n и b_n мы усматриваем, что любое a_n меньше каждого b_m , т.е. что каковы бы ни были натуральные числа n и m , имеет место неравенство

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1} . \qquad /C/$$

Можете ли Вы доказать неравенство /C/ непосредственно ?

О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ

Э.Э.ШНОЛЬ

(краткое содержание лекций)

I. Формула для решения (приведенного) кубичного уравнения $x^3+bx+c=0$ (I) в виде:

$$x=\sqrt[3]{-\frac{c}{2}+\sqrt{\frac{c^2}{4}+\frac{b^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{c}{2}-\sqrt{\frac{c^2}{4}+\frac{b^3}{27}}} \qquad (2)$$

На первый взгляд кажется, что этой формулой почти так же удобно пользоваться, как формулой для квадратного уравнения.

Так ли это ?

Разбираются примеры. а) $x^3+x-2=0$. Рациональный корень $(x=1)$ представляется в виде суммы иррациональных чисел.

б) $x^3-7x-6\equiv(x+1)(x+2)(x-3)$

Три действительных корня , но $d=\frac{c^2}{4}+\frac{b^3}{27}$ - " дискриминант уравнения" - меньше 0 : действительные решения выражаются по формуле (2) с помощью комплексных чисел. Замечание(" мелкий шрифт ") о том, как из (2) получить <u>три</u> решения.

2. Формулируется (без доказательства) связь между знаком дискриминанта $d=\frac{c^2}{4}+\frac{b^3}{27}$ и числом действительных корней уравнения (I) .

Картинки:

при $b>0$; при $b<0$

(всегда $d>0$)

постепенный переход от 2 к 4 при уменьшении c .

Задача. Докажите, что условие $\frac{b^3}{27}+\frac{c^2}{4}=0$ необходимо и достаточно для того, чтобы уравнение (I) имело кратный корень.

Указание. Записать

$$x^3+bx+c=(x-\alpha)^2(x-\beta)$$

3. Коротко рассказывается о поисках формул решения уравнений в радикалах.

Последние этапы: Руффини 1799; Абель 1824; Галуа 1830 .

4. Как быть, если уравнение все-таки нужно решить ?

Ограничиваем задачу нахождением одного корня. Предполагаем далее, что приблизительное его значение нам известно.

Пример $x^3+x-2,1=0$, $x\approx 1$. Пишем $x=1+u$, подставляем в уравнение и оставляем лишь линейные по u члены. Получаем $x\approx 1,025$.

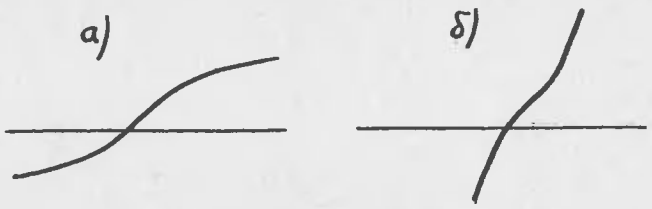
Это метод Ньютона.

Дается общая формулировка (в применении к многочленам).

5. Метод Ньютона применяется к уравнениям $x^n-a=0$. В частности: а) итерационный процесс для $\sqrt{a}$: $x_{s+1}=\frac{1}{2}\left(x_s+\frac{a}{x_s}\right)$ - есть метод Ньютона (так вычисляется $\sqrt{a}$ вычислительными машинами).

б) $\sqrt[n]{1+\alpha}=1+\frac{1}{n}\alpha$ при малых α - первое приближение метода Ньютона.

6. Объясняется (без каких-либо доказательств) геометрический смысл метода Ньютона. В частности, обсуждаются по рисунку, условия сходимости в случаях рис. а) и б)

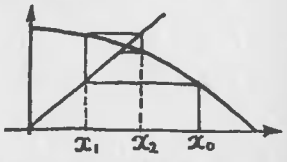


7. Метод последовательных приближений .

Примеры:

а) $2x-1=0{,}1\sin x$ (одно приближение),

б) $x=\frac{1}{2}\cos x$ (картинка):



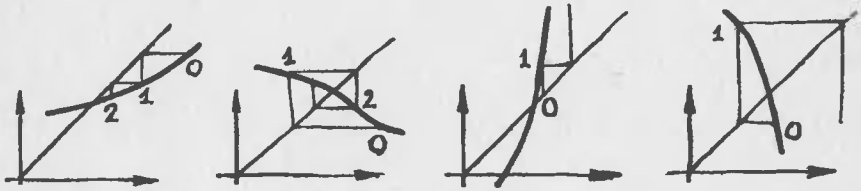
и доказательство того, что разность соседних приближений $x_{s+1}-x_s$ убывает с увеличением s .

в) $x=tg\,x$: расходимость приближений $x_{n+1}=tg\,x_n$

г) Уравнения $a^x-1=x$ для $a=2$, $a=3$ (e^x - кривая пограничная между двумя случаями).

$x=0$ - " притягивающее " решение при $a=2$ и "отталкивающее" при $a=3$.

8. 4 возможных случая поведения последовательных приближений $x_{n+1}=f(x_n)$



Резюме: для сходимости нужно, чтобы $f(x)$ менялась "не резко".

9. Точная формулировка.

Если $f(x)$ определена для всех x и $|f(u)-f(v)|<q|u-v|$ при $q<1$, то уравнение $f(x)=x$ имеет одно решение и его можно получить как предел последовательности x_n: $x_{n+1}=f(x_n)$.

а) $f(x)$ непрерывна: если $x_n \to a$, то $f(x_n) \to f(a)$,

б) Если при $x=a$, $f(a)>a$, то при некотором $x=b$ $f(b)<b$,

в) объяснено по рисунку и намечено аккуратное доказательство обращения в 0 функции $g(x)=f(x)-x$,

г) доказана (на примере $q=1/2$) сходимость последовательности $f(x_n)=x_{n+1}$ к решению $f(x)=x$.

Замечено, что отсюда следует существование (т.е. б) и в) можно опустить).

10. Заключительные замечания:

а) Метод Ньютона для уточнения корней многочленов есть специальный частный случай метода последовательных приближений:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{P(x_n)}{Q(x_n)}$$

б) Метод последовательных приближений может быть применен к системам уравнений.

Задачи.

1. Доказать, что

$$1=\sqrt[3]{1+\sqrt{28/27}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{28/27}}\,.$$

(к п.1)

2. Задача о кубичном уравнении с дискриминантом 0 (п.2).

3. а) Решить приближенно уравнение

$$10^{-4}x^2+2x-1=0,$$

б) что делается с корнями уравнения

$$\varepsilon x^2+ax+b=0$$ при уменьшении ε ?

4. Найти приближенно корни уравнений

а) $\pm 10^{-4}x^3+2x-1=0$, б) $10^{-4}x^3+x^2-3x+2=0$,

в) $10^{-4}x^3+x^2+2x+1=0$ (к п. 4)

5. а) В двух бидонах емкостью по 30 литров налито: в первом 20 л. воды, во втором 20 л. молока. Из первого переливается 10 л. во второй , перемешивается и переливается 10 л. обратно.

Пусть a_n относительное содержание молока в первом бидоне после n таких переливаний. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1/2$.

* б) Та же задача, если каждый раз переливается не менее 5 литров . (Но неизвестно, сколько именно).

6. Из некоторой точки A_0 на плоокости отложен отрезок длины I вдоль оси OX , затем из его конца A_1 - отрезок A_1A_2 длины I/2 под углом α к первому, затем A_2A_3 длины I/4 под углом α ко второму и т.д.

Доказать, а) что последовательность точек $A_0, A_1, \ldots$ стремится к некоторой точке C_α ,

* б) что при изменении угла α от 0 до 360^0 точка C_α описывает окружность.

Указание. Использовать комплексные числа.

7. а) Придумайте способ для решения методом последователь-

ных приближений уравнения $x = 2\sin x$.

<u>Указание</u>: прибавьте к обеим частям ax и подберите a .

б) Докажите, что первое положительное решение уравнения $x = \operatorname{tg} x$ можно найти следующим способом последовательных приближений:

$$x_{n+1} = \pi + \operatorname{arctg} x_n .$$

Придумайте другой способ, не требующий вычисления $\operatorname{arctg} x$.

8. Как ведут себя последовательности, задаваемые формулами

а) $x_{n+1} = \sin x_n$;

б) $x_{n+1} = \cos x_n$;

в) $x_{n+1} = 2^{-x_n}$ $x_0 > 0$,

9. Дается система 99 линейных уравнений

$$
\begin{aligned}
100x_1 + \bigcirc x_2 + \ldots + \bigcirc x_{99} &= f_1 \\
\bigcirc x_1 + 100x_2 + \ldots + \phantom{\bigcirc x_{99}} &= f_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots& \\
\bigcirc x_1 + \bigcirc x_2 + \ldots + 100x_{99} &= f_{99} .
\end{aligned}
$$

Все невыписанные коэффициенты равны 0 или – I. Докажите :

I) что при любых f существует единственное решение этой системы ,

2) если все $f_i \geqslant 0$,то и все $x_i \geqslant 0$.

<u>Указание</u>. Решите сначала эту задачу, при $f_1 = f_2 = \ldots = f_{99} = 1$.

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ПО ТЕМЕ " КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ"

А.Б.КАТОК, И.Д.НОВИКОВ

I. а) Доказать, что если корень квадратный из натурального числа не есть целое число, то он не предотавим в виде обыкновенной дроби.

б) То же для корня любой (натуральной) степени.

2. а) Доказать, что $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ не представим в виде обыкновенной дроби.

б) то же для $\sqrt{2}+\sqrt{6}+\sqrt{7}$.

3. Доказать эквивалентность двух определений умножения векторов

I. $\vec{r}_1=(x_1,y_1)$, $\vec{r}_2=(x_2,y_2)$. Тогда $\vec{r}_1\cdot\vec{r}_2=(x_1x_2-y_1y_2,\ x_1y_2+x_2y_1)$

II. $\vec{r}_1=(r_1,\varphi_1)$, $\vec{r}_2=(r_2,\varphi_2)$, где r - длина вектора, φ - угол, образуемый вектором с положительным направлением оси абсцисс. Тогда $\vec{r}_1\cdot\vec{r}_2=(r_1\cdot r_2;\ \varphi_1+\varphi_2)$.

4. Проверить следующие свойства умножения (пользуясь любым из определений)

а) $\vec{r}_1\cdot\vec{r}_2=\vec{r}_2\cdot\vec{r}_1$ (коммутативность)

в) $(\vec{r}_1\cdot\vec{r}_2)\vec{r}_3=\vec{r}_1(\vec{r}_2\cdot\vec{r}_3)$ (ассоциативность)

с) $(\vec{r}_1+\vec{r}_2)\vec{r}_3=\vec{r}_1\vec{r}_3+\vec{r}_2\cdot\vec{r}_3$ (дистрибутивность)

5. Доказать, что для любых $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ (если $\vec{r}_1\neq 0$) существует и притом единственное комплексное число $\vec{r}_3$ такое, что $\vec{r}_1\cdot\vec{r}_3=\vec{r}_2$ (для комплексных чисел всегда возможно деление) .

6. Три комплексных числа z_1, z_2, z_3 лежат на одной

прямой тогда и только тогда, когда $\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$ – вещественное

7. Найти множества на комплексной плоскости, удовлетворяющие следующим условиям $|2z+5|=3$, $|3z-3i|<7$, $2\mathrm{Re}\, z < \frac{1}{2}|z|$, $\mathrm{Re}\, z < \mathrm{Im}\, z$.

8. Доказать, что сумма всех корней n -ной степени из комплексного числа равна нулю.

9. Вычислить ,пользуясь формулой,суммы геометрической прогрессии:

а) $\sin\alpha + \sin 2\alpha + \ldots + \sin n\alpha$

б) $\cos\alpha + \cos 2\alpha + \ldots + \cos n\alpha$

в) $\sin\alpha + \sin 3\alpha + \ldots + \sin(2n-1)\alpha$

IO. Вычислить, пользуясь формулой бинома Ньютона:

а) $C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \ldots$

б) $C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - \ldots$

в) $C_n^0 - 2C_n^2 + 4C_n^4 - 8C_n^6 + 16C_n^8 - \ldots$.

II. Найти выражения $\sin n\alpha$ и $\cos n\alpha$ через $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ (воспользоваться формулой Бинома Ньютона).

I2. Известно, что $a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n = 0$ ($a_0, a_1, \ldots, a_n$ – действительные числа). Доказать, что $a_0 + a_1 \bar{z} + \ldots + a_n \bar{z}^n = 0$.

I3. Пусть ω_0 – какой-нибудь корень n -ной степени из числа z . $1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ – все корни n – ной степени из I. Тогда $\omega_0, \omega_0\varepsilon_1, \ldots, \omega_0\varepsilon_{n-1}$ – все корни n -ной степени из z .

I4. Доказать, что существует такой корень n -ной степени из I (обозначим его ε), что все корни n - ной степени из I имеют вид $1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{n-1}$.

ТЕОРЕМА О ПРОМЕЖУТОЧНОМ ЗНАЧЕНИИ, КОМПАКТНОСТЬ МНОЖЕСТВ, ТЕОРЕМА О МАКСИМУМЕ НЕПРЕРЫВНОЙ ФУНКЦИИ

/ ЗАДАЧИ /

А.Б.КАТОК

Теорема о промежуточном значении: Пусть $f(x)$ – непрерывная функция на отрезке $[a, b]$. Тогда для любого числа m, заключенного между $f(a)$ и $f(b)$ найдется такое $c \in [a, b]$, что $f(c) = m$.

I. а) построить пример функции, удовлетворяющей теореме о промежуточном значении и разрывной в какой-нибудь точке.

б) построить пример функции, удовлетворяющей теореме о промежуточном значении и разрывной во всех точках отрезка $[0, 1]$.

2. Верно ли такое усиление теоремы о промежуточном значении: если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то для любого числа m, заключенного между $f(a)$ и $f(b)$, найдется такое $c \in [a, b]$ и такое $\delta > 0$, что

1^0. $f(c) = m$

2^0. При $0 < h < \delta$ $\begin{cases} f(c+h) \geq m \\ f(c-h) \leq m \end{cases}$ или $\begin{cases} f(c+h) \leq m \\ f(c-h) \geq m. \end{cases}$

3. Пусть функция $f(x)$, определенная на отрезке $[a, b]$, обладает следующим свойством: на любом отрезке $[c_1, c_2] \subset [a, b]$ она принимает, и притом конечное число раз, любое значение между $f(c_1)$ и $f(c_2)$. Доказать, что $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$.

4. Теорема о промежуточном значении для функций двух переменных: пусть $f(x, y)$ – непрерывная функция, заданная в некоторой выпуклой области F, и пусть P – ломаная с кон-

цами в точках A и B , целиком лежащая внутри F .

Тогда $f(x)$ принимает на P любое значение, заключенное между $f(A)$ и $f(B)$.

5. Взаимно однозначное непрерывное отображение f отрезка на себя всегда имеет неподвижную точку x , т.е. точку, для которой $f(x)=x$.

6. Найти все непрерывные отображения f отрезка $[0,1]$ в себя, для которых $f(0)=0$, $f(1)=1$, $f[f(x)]\equiv x$.

7. а) Доказать, что непрерывная на отрезке функция имеет обратную тогда и только тогда, когда она строго монотонна.

б) То же самое для функций, непрерывных на интервале .

8. а) Существует ли непрерывная на отрезке функция, которая принимает каждое свое значение ровно два раза ?

б) Построить какую-нибудь разрывную функцию, обладающую таким свойством.

9. Пусть $f(\varphi)$ - непрерывная функция на окружности $(0\le\varphi<2\pi)$. Доказать, что

а) оществует точка φ , для которой $f(\varphi)=f(\varphi+\pi)$

б) ——"—— φ , для которой $f(\varphi)=f(\varphi+\frac{\pi}{4})$

в) ——"—— φ , для которой $f(\varphi)=f(\varphi+\alpha)$

для данного α .

10. а) $f(x)$ - непрерывная функция на отрезке $[0,1]$, причем $f(0)=f(1)$.

Доказать, что для любого целого числа n найдется точка x , для которой $f(x)=f(x+1/n)$.

б) Доказать, что для любого $\alpha \neq \frac{1}{n}$ можно построить функцию f ; для которой $f(x) \neq f(x+\alpha)$ при всех $x \in [0,1]$.

В ПОСЛЕДУЮЩИХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ / II-I4 / ТРЕБУЕТСЯ НЕ ТОЛЬКО ДАТЬ РЕШЕНИЕ СО ССЫЛКОЙ НА ТЕОРЕМУ О ПРОМЕЖУТОЧНОМ ЗНАЧЕНИИ, НО И ДОКАЗАТЬ НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ, К КОТОРЫМ ЭТА ТЕОРЕМА ПРИМЕНЯЕТСЯ.

II. Доказать, что любой выпуклый многоугольник на плоскости можно разделить на две равновеликие части прямой заданного направления.

I2. Доказать, что любые два выпуклых многоугольника на плоскости можно одновременно разделить некоторой прямой на две равновеликие части.

I3. Доказать, что выпуклый многоугольник на плоскости можно разделить двумя перпендикулярными прямыми на четыре равновеликие части.

I4. Доказать, что около выпуклой фигуры на плоскости можно описать квадрат.

I5. Теорема Ролля: Если $f(x)$ имеет производную в каждой точке отрезка $[0,1]$ и $f(a)=f(b)$,то существует точка $c \in [a,b]$, для которой $f'(c)=0$.

I6. Пусть $f(x)$ имеет производную в каждой точке отрезка $[a,b]$. Тогда функция $f'(x)$ принимает все свои промежуточные значения .

I7. Если $f(x) \neq const$ и $f'(x)$ существует во всех точках отрезка $[a,b]$,то найдется точка $c \in [a,b]$, в которой $f'(c) \neq 0$.

ЗАДАЧИ О КОМПАКТНОСТИ МНОЖЕСТВ.

Пусть дано некоторое пространство S , в котором определено понятие сходимости последовательностей точек. Мно -

жество $A \subset S$ называется компактом, если из любой последовательнооти точек $x_n \in A$ можно выделить последовательность, сходящуюся к некоторой точке $x \in A$.

I8. Для того, чтобы множество на плоокости было компактом, необходимо и достаточно, чтобы оно было замкнутым и ограниченным.

I9. Пусть А и В - некоторые множества. Рассмотрим множество С пар (a, b), где $a \in A$ и $b \in B$. Последовательность пар (a_n, b_n) назовем сходящейся к паре (a_o, b_o), если $a_n \to a_o$, $b_n \to b_o$. Множество С называется прямым произведением множеств А и В. Доказать, что прямое произведение компактов является компактом.

20. Доказать, что следующие множества являются компактами.

а) Единичный куб в n - мерном линейном пространстве.

Сходимость : $(x_1^m, \ldots, x_n^m) \underset{m \to \infty}{\longrightarrow} (x_1^o, \ldots, x_n^o)$,

если

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k^m - x_k^o)^2} \underset{m \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

б) Множество векторов n - мерного линейного пространства, для которых $x_k \geqslant 0$, $\sum_{k=1}^{n} x_k = 1$ $k = 1, \ldots, n$.

/Сходимость пункта a /.

в) Множество всех (в том числе и вырожденных) треугольников на плоскости, лежащих внутри данного круга /Сходимость: $A_n \to A$, если можно занумеровать вершины каждого из треугольников A_n и A так, чтобы вершины с одинаковыми номерами образовывали последовательность точек, сходящуюся к соответствующей вершине треугольника А /.

г) Множество всех треугольников периметра I, целиком лежащих внутри данного круга /Сходимость такая же, как в п. в /.

д) Множество всех (в том числе и вырожденных) выпуклых n - угольников периметра I, целиком лежащих внутри данного круга / сходимость аналогична сходимости в пункте в) /.

е) Множество всех вписанных в данную окружность k - угольников, где k пробегает значения I,2 , ..., n .

2I. В этой задаче сходимость определяется через расстояние между множествами: последовательность $A_n \to A$, если $\rho(A_n, A) \to 0$.

а) Определим расстояние от точки x до многоугольника A формулой $\rho(x, A) = \inf_{y \in A} \rho(x, y)$. Положим $\rho_1(A, B) = \max\left[\sup_{x \in B} \rho(x, A), \sup_{z \in A} \rho(z, B)\right]$. Множество пункта д) задачи 2I компактно, если сходимость определяется метрикой $\rho_1(A, B)$.

б) Определим расстояние между фигурами A и B формулой $\rho_2(A, B) =$ площадь $[(A \cup B) \setminus (B \cap A)]$. Доказать, что множество выпуклых фигур периметра I, лежащих внутри данного круга компактно в метрике $\rho_2(A, B)$.

в) Доказать, что множество пункта б) компактно и в метрике $\rho_1(A, B)$ пункта а).

22. Доказать, что следующие множества не являются компактами:

а) Множество всех треугольников на плоскости / сходимость задачи 20 в /.

б) Множество всех описанных около данного круга k - угольников, где k - принимает значение 3,4, ..., n / сходимость задач 21 а) или 21б).

в) Множество всех треугольников, у которых одна вершина лежит на данной полуокружности, а две остальные - на стягивающем ее диаметре (сходимость задачи 20в).

ЗАДАЧИ О ДОСТИЖЕНИИ МАКСИМУМА

Числовая функция $f(x)$, определенная на компакте A называется непрерывной, если из того, что $x_n \to x$,следует, что $f(x_n) \to f(x)$.

Теорема о максимуме непрерывной функции: Пусть $f(x)$ - непрерывная функция на компакте A . Тогда найдется такое $x_0 \in A$, что $f(x_0) \geq f(x)$ для всех $x \in A$.

23. Верно ли, что всякая функция, определенная на отрезке $[a, b]$ и достигающая максимума и минимума на любом замкнутом множестве $F \subset [a, b]$, непрерывна на отрезке $[a, b]$?

24 а) Пусть F - замкнутое ограниченное множество на плоскости . Тогда $\exists\, x_1, x_2 \in F : \forall\, x_3, x_4 \in F \; \rho(x_1, x_2) \geq \rho(x_3, x_4)$.

б). Пусть F - замкнутое множество на плоскости ; $x_0 \in F$. Тогда $\exists\, x' \in F : \forall\, x'' \in F \; \rho(x_0, x') \leq \rho(x_0, x'')$

в) Пусть F_1 и F_2 - замкнутые ограниченные множества на плоскости. Тогда $\exists\, x_1 \in F_1$ и $x_2 \in F_2$: $\forall\, x_1' \in F_1$ и $\forall\, x_2' \in F_2$ $\rho(x_1, x_2) \leq \rho(x_1', x_2')$.

25. Неравенство о среднем арифметическом и среднем гео-

метрическом:

Если $a_k \geq 0 \qquad k = 1, \ldots, n$,то

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k \geq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k}.$$

В ПОСЛЕДУЮЩИХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ / 26-31 / ТРЕБУЕТСЯ СТРОГО ДОКАЗЫВАТЬ НЕПРЕРЫВНОСТЬ ВСЕХ ФУНКЦИЙ, К КОТОРЫМ ПРИМЕНЯЕТСЯ ТЕОРЕМА О ДОСТИЖЕНИИ МАКСИМУМА И МИНИМУМА

26. Из всех треугольников данного периметра наибольшую площадь имеет правильный.

27. Из всех четырехугольников данного периметра наибольшую площадь имеет квадрат.

28. Из всех n - угольников, вписанных в данный круг, наибольшую площадь имеет правильный.

29. Из всех n - угольников, вписанных в данный круг, наибольший периметр имеет правильный.

30. ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА: Из всех фигур данного периметра наибольшую площадь имеет круг.

ЛЕММА I: Невыпуклая фигура не может иметь наибольшую площадь из всех фигур данного периметра.

ЛЕММА 2: Если какая-нибудь хорда, делящая пополам периметр выпуклой фигуры, делит ее площадь на две неравные части, то существует фигура такого же периметра и большей площади.

ЛЕММА 3: Для любой фигуры существует центральносимметричная фигура такого же периметра и не меньшей площади.

ЛЕММА 4: Из всех треугольников с двумя данными сторонами наибольшую площадь имеет прямоугольный.

ЛЕММА 5: Если фигура – не круг, то существует фигура такого же периметра и большей площади.

31. ЗАДАЧА ДИДОНЫ: Из всех фигур, ограниченных каким-нибудь отрезком данной прямой и кривой длины ℓ , найти ту, которая имеет наибольшую площадь.

Изменения в списке преподавателей математики в школе № 2.

8А. НОВИКОВ Илья Давидович
СОКОЛОВСКАЯ Татьяна Владимировна
РУБЧИНСКИЙ Александр Анатольевич

8Б КАТОК Анатолий Борисович
РОЗОВСКИЙ Михаил Ефимович
БУХЕНСКАЯ Светлана Михайловна
ГРИНФЕЛЬД Аида Евсеевна

ОДНА ПРОБЛЕМА ИЗ ТЕОРИИ КРИВЫХ

А. КОЛМОГОРОВ

В выпуске IУ-У МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ШКОЛЫ 1965 г. на стр. 54 Е.Б.Дынкин называет гладкой дугу, которая может быть представлена параметрически в виде

$$p = f(t)$$

где t пробегает отрезок $[a, b]$, а f дифференцируемая векторная функция.

Это определение очень интересно, но несколько отличается от обычного*.

ЗАДАЧА. Доказать, что любая ломаная из конечного числа звеньев является гладкой дугой по Е.Б.Дынкину.

Эта задача для своего решения требует некоторого остроумия, но по существу не слишком трудна для учеников математических школ. Меня занимает еще решение такой проблемы:

ПРОБЛЕМА. Существуют ли не гладкие дуги конечной длины?

Определение дуги конечной длины дано там же на стр. 55 (дуги конечной длины называются " спрямляемыми").

---

*Прим.ред. Обычно дополнительно предполагается, что производная $f'(t)$ не обращается в нуль.

П Р О Г Р А М М А

ВЫПУСКНОГО ЭКЗАМЕНА ПО АЛГЕБРЕ И НАЧАЛАМ АНАЛИЗА

для 10-х классов школы № 2 с математической специализацией.

1. Арифметическая и геометрическая прогрессии. Формулы для общего члена и для суммы n членов.

2. Свойства неравенств.

3. Линейная функция $y = kx + l$ и ее график. Общее линейное уравнение с двумя неизвестными и его геометрическое истолкование. Множество на плоскости, описываемое неравенством

$$ax + by + c > 0$$

4. Системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Подробное исследование и геометрическое истолкование всех возможных случаев.

5. Квадратная функция $y = ax^2 + bx + c$ и ее график. Формула для решения квадратного уравнения. Множество, определяемое неравенством $ax^2 + bx + c > 0$.

6. Аргумент и модуль вектора на плоскости (при фиксированном векторе-единице). Умножение векторов. Его дистрибутивность относительно сложения. Поле комплексных чисел. Сопряженные числа.

7. Определение функций $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$. Представление комплексного числа в виде $a + bi$ и выражение коэффициентов a и b через модуль и аргумент. Сокращенное выражение $e^{i\varphi}$ для вектора $\cos\varphi + i\sin\varphi$. Формулы приведения и сложения для:

$$e^{i\varphi},\ \cos\varphi,\ \sin\varphi,\ ctg\,\varphi = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi},\ tg\,\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$$

Выражения для тригонометрических функций двойного и половинного углов.

8. Корни n - ой степени из единицы и из произвольного комплексного числа z. Выражения в радикалах для корней кубич-

ных из единицы и значения $\sin\frac{\pi}{3}$; $\sin\frac{2\pi}{3}$, $\cos\frac{\pi}{3}$, $\sin\frac{2\pi}{3}$.

9. Существование комплексного корня у любого многочлена с комплексными коэффициентами (без доказательства). Разложение многочлена на линейные множители. Разложение многочлена с вещественными коэффициентами на линейные и квадратные множители с вещественными коэффициентами. Выражение коэффициентов многочлена через корни (формулы Виета).

10. Предел последовательности. Единственность предела. Переход к пределу в неравенствах. Предел суммы, произведения и частного.

11. Существование предела у монотонной ограниченной последовательности. Доказать, что $q^n \to 0$, если $|q|<1$. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

12. Непрерывные функции: определения через предел последовательности и через окрестности.

13. Теорема о промежуточном значении.

14. Теорема о существовании обратной для строго монотонной непрерывной функции. Приложение к функции $y=\sqrt[n]{x}$.

15. Определение и свойства степенной функции $y=x^\alpha$ при рациональном α .

16. Предел функции при $x \to a$. Предел суммы, произведения, частного, функции от функции.

17. Производная. Ее геометрический и физический смысл. Производная суммы, произведения и частного. Производная от функции и обратной функции. Производная степенной функции и многочлена.

18. Теорема Лагранжа (без доказательства). Следствия: если на некотором отрезке производная неотрицательна, то функция возрастает; если производная равна нулю, то функция постоянна.

19. Применение производной к исследованию поведения функций максимумы, минимумы, возрастание, убывание.

20. Интеграл как число, заключенное между верхними и ниж-

ними суммами Дарбу. Геометрическое истолкование. Существование и единственность такого числа для непрерывных функций (без доказательства). Интеграл как предел интегральных сумм (без доказательства).

21. Основные свойства интеграла:

1) $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$

2) $\int_a^b [kf(x) + \ell g(x)]\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx + \ell \int_a^b g(x)\,dx$

3) если $m < f(x) \le M$ при всех $x \in [a, b]$, то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(a-b)$$

22. Построение первообразной с помощью интегрирования. Выражение определенного интеграла через первообразную. Первообразная для степенной функции.

23. Определение натурального логарифма через интеграл:

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}$$

Вывод соотношения $\ln(xy) = \ln x + \ln y \quad (x, y > 0)$.

Строгая монотонность. Пределы при $x \to 0$ и при $x \to +\infty$.

24. Функция $\exp x$ как обратная функция для $\ln x$. Вывод соотношения $\exp(x+y) = \exp x \exp y$. Производная функции $\exp x$.

25. Доказательство равенства $\exp[x \ln a] = a^x$ для рациональных X. Это же равенство как определение степени с иррациональным показателем. Производная и первообразная для функции $y = a^x$.

26. $\log_a x$ как функция, обратная к a^x. Выражение $\log_a x$ через $\ln x$. Десятичный логарифм $\lg x$ и его свойства.

27. Производные функций $\sin x$, $\cos x$, $tg\,x$, $ctg\,x$. Графики этих функций. Периодичность, четность или нечетность. Решения уравнений $\sin x = c$, $\cos x = c$; $tg\,x = c$; $ctg\,x = c$.

Первообразные для функций $\sin(ax+b)$ и $\cos(ax+b)$.

28. Алгебраические соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента. Рациональные выражения $\sin x$ и $\cos x$ через $tg\,\frac{x}{2}$.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ВАРИАНТЫ ПИСЬМЕННОЙ ЭКЗАМЕНАЦИОННОЙ РАБОТЫ НА МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОМ ФАКУЛЬТЕТЕ МГУ

I. 1. Решить неравенство $x^2 \geq x\left(2+\sqrt{12-2x-x^2}\right)$.

2. Найти зависимость от параметра α числа корней уравнения

$$\alpha \cos^2 x - 1 = -\sqrt{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right),$$

лежащих в интервале $(0,\pi)$.

3. В треугольнике ABC медиана AM равна стороне AB, дан угол A. Найти углы B и C.

4. Дан правильный восьмиугольник, сторона которого a. Найти геометрическое место $M(R)$ точек пространства, удаленных от восьмиугольника на расстояние не более R. Вычислить объем полученного тела. (Точка C удалена от фигуры m на расстояние не более R, если у фигуры m найдется точка $\mathcal{D}$, расстояние от которой до C не превышает R).

II.1. Решить неравенство $\cos^2 x < |\sin x| + a$, где $0 \leq x \leq 2\pi$ и a - действительный параметр.

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_y |\log_y x| = \log_x |\log_x y| \\ (\lg x)^2 + (\lg y)^2 = 8 \end{cases}$$

3. На одной из сторон угла, равного α, даны две точки, расстояние которых до другой стороны равны b и c. Найти радиус окружности, проходящий через точки и касающийся другой стороны угла.

4. Дан правильный шестиугольник, сторона которого a. Найти геометрическое место $M(R)$ точек пространства, удаленных от шестиугольника на расстояние не более R. Вычислить объем полученного тела. (Точка C удалена от фигуры m на расстояние не более R, если у фигуры m найдется точка D, расстояние от которой до C не превышает R).

ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЭКЗАМЕНАМ ПО МАТЕМАТИКЕ

(задачи по стереометрии)

Ниже помещены задачи по стереометрии, которые рассылались ученикам Республиканской заочной математической школы. Задачи были подобраны доцентом механико-математического факультета МГУ Л.Е.Евтушиком.

Задача по стереометрии часто является наиболее трудоемкой частью вступительной контрольной работы, состоящей из четырех задач по разным разделам программы.

К ее решению предъявляется ряд требований: а) правильное построение чертежа данной фигуры и необходимых вспомогательных элементов ее; б) выяснение и обоснование геометрических соотношений между различными элементами (ортогональность, параллельность прямых или плоскостей и т.п.); в) аккуратное вычисление искомых величин. Особое внимание при оценке работы обращается на доказательство основных соотношений между элементами фигуры, на которых основано решение задачи.

При оформлении работы старайтесь: I) чтобы чертеж (он может быть сделан и от руки) был полным и достаточно ясным для проверяющего работу; 2) чтобы объяснение построений и доказательства утверждений были ясными четкими и по возможности краткими.

Вначале приведены вопросы такого типа, которые могут быть заданы на устном экзамене. Остальные задачи предлагались на письменных экзаменах на механико-математическом факультете МГУ в последние десять лет.

ПРИМЕРЫ УСТНЫХ ВОПРОСОВ ПО СТЕРЕОМЕТРИИ

I. В пространстве даны три попарно скрещивающиеся прямые. Существует ли четвертая прямая, перпендикулярная ко всем трем заданным прямым, и в каком случае?

2. В пространстве расположены два плоских острых угла, причем стороны этих углов соответственно взаимно перпендикулярны. Будут ли эти углы равны ?

3. Определить геометрические места точек в пространстве:

а) находящихся на расстоянии α от каждой из двух пересекающихся плоскостей;

б) равноудаленных от трех плоскостей, перпендикулярных некоторой плоскости;

в) равноудаленных от трех параллельных прямых пространства.

4) Двугранный угол рассечен различными плоскостями. Указать, в каких пределах может изменяться величина угла, образованного в различных сечениях.

5) Найти угол между скрещивающимися диагоналями любых двух прилежащих граней куба.

6) Перечислить возможные сечения куба и правильного тетраэдра плоскостью.

7) Можно ли пересечь произвольный тетраэдр плоскостью так, чтобы в сечении получился параллелограмм? ромб ? прямоугольник ?

8) Построить сечение куба плоскостью :

а) проходящей через три точки, расположенные на трех смежных и не параллельных ребрах куба;

б) проходящей через три точки, лежащие соответственно на трех попарно скрещивающихся ребрах.

9) Укажите на поверхности куба кратчайший путь, соединяющий две противоположные вершины куба.

10) Какую плоскую фигуру дает проекция правильного тетраэдра на плоскость, параллельную двум его несмежным ребрам ?

11) Можно ли в деревянном кубе выточить такую сквозную дыру, чтобы сквозь нее прошел куб, равный данному ? Каким образом?

I2) Существуют ли четырехугольные пирамиды, у которых две противоположные грани перпендикулярны плоскости основания? Приведите пример, если таковые существуют. Могут ли вообще две несмежные боковые грани многоугольной пирамиды быть перпендикулярны к плоскости основания ?

I3) $SABCDEF$ - правильная пирамида с вершиной S. Построить прямую пересечения плоскостей граней:

а) ASB и CSD,

б) ASF и CSD.

I4) У некоторой пирамиды все боковые грани наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом α. Доказать, что площадь S ее боковой поверхности равна: $S = \frac{S_o}{\cos\alpha}$, где S_o - площадь основания пирамиды.

I5) Может ли осевое сечение прямого кругового конуса иметь площадь в два раза меньшую, чем другое его сечение плоскостью, проходящей через вершину конуса ?

ЗАДАЧИ ПО СТЕРЕОМЕТРИИ ИЗ ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ПИСЬМЕННЫХ РАБОТ

I) Отрезки двух прямых, заключенные между параллельными плоскостями относятся как 2:3 , а их углы с одной из плоскостей - соответственно как 2:I . Определить эти углы.

2) Два отрезка - AB длины a и CD длины b - лежат на скрещивающихся прямых, угол между которыми α. Основания O и O' общего перпендикуляра длины c к этим прямым делят отрезки AB и CD так, что

$$AO : OB = 2 : 3 \; ; \; CO' : O'D = 3 : 2 .$$

Найти длины отрезков BD и BC.

3) Из точки ребра двугранного угла $\alpha\ (0<\alpha\leq\frac{\pi}{2})$ исходят два луча, расположенные в различных полуплоскостях его. Один из этих лучей перпендикулярен ребру, а другой образует острый угол β с ребром. Найти угол между данными лучами.

4) В пространстве даны 5 точек A, B, C, D, E, из которых никакие четыре не лежат в одной плоскости. Пусть P – середина AE; P' – середина CD; Q – точка пересечения медиан тре – угольника BCD, а Q' – точка пересечения медиан треугольника ABC. Доказать, что отрезки PQ и $P'Q'$ пересекаются. В каком отношении они делятся в точке пересечения ?

5) В пространстве даны два луча Ax и By, не лежащие в одной плоскости и образующие между собою угол 90^0; AB – их общий перпендикуляр. На лучах Ax и By рассматриваются точки: M на Ax и P на By, такие, что $2AM\cdot BP=AB^2$. Доказать, что расстояние от середины O отрезка AB до прямой MP равно $0{,}5\,AB$.

6) У трехгранного угла $OABC$ угол между гранями OAB и OBC – прямой, а величина каждого из остальных двугранных углов равна γ. Найти величину плоского угла AOC.

7) Даны три плоских угла трехгранного угла $SABC$:

$\angle BSC=\alpha;\ \angle CSA=\beta;\ \angle ASB=\gamma$.

Найти двугранные углы этого трехгранного угла.

8) Плоские углы трехгранного угла равны 45^0, 45^0 и 60^0. Через его вершину проведена прямая, перпендикулярная к одной из граней, плоский угол которой равен 45^0. Найти угол между этой прямой и ребром трехгранного угла, не лежащим в упомянутой грани.

9) Непересекающиеся диагонали двух смежных боковых граней прямоугольного параллелепипеда наклонены к плоскости его основания под углами α и β. Найти угол между этими диагоналями.

I0) В треугольной пирамиде две грани являются прямоугольными равнобедренными треугольниками, которые примыкают гипотенузами и образуют двугранный угол, ребром которого является катет прямоугольного треугольника. Определить двугранный угол в этой пирамиде, ребром которого является катет прямоугольного треугольника.

II) Высота треугольной пирамиды $ABCD$, опущенная из вершины D, проходит через точку пересечения высот треугольника ABC. Кроме того, известно, что $BD=b$; $DC=c$, $\angle BDC=90^\circ$. Найти отношение площадей граней ADB и ADC.

I2) В трехгранной пирамиде высота, приведенная из вершины, попадает в точку пересечения высот треугольника, лежащего в основании. Показать, что тем же свойством обладают и все высоты пирамиды, опущенные из вершины основания на боковые грани.

I3) Доказать, что у пирамиды, находящейся в условиях предыдущей задачи противоположные ребра перпендикулярны. Доказать обратную теорему.

I4) В треугольной пирамиде каждая пара скрещивающихся ребер образует между собою прямой угол. Доказать, что в такой пирамиде суммы квадратов длин каждой пары скрещивающихся ребер одинаковы.

I5) В тетраэдре $OABC$ ребра продолжены в обе стороны. Пусть S – плоскость параллельная грани ABC; P, Q и R – середины ребер BC, CA, AB; A', B', C' – точки пересечения плоскости S с ребрами OA, OB, OC. При каком положении плоскости S прямые $A'P$, $B'Q$ и $C'R$ параллельны между собою.

I6) Ребро куба равно a. Сфера с центром O пересекает три ребра, сходящиеся в вершине A, в их серединах. Из точки B пересечения сферы с одним из ребер куба опущен перпендикуляр на диагональ куба, проходящую через вершину A, причем угол между этими перпендикуляром и радиусом OB делится ребром куба пополам. Найти радиус сферы.

17) Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, где AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 –боковые ребра. В каком отношении делит ребро C_1B_1 точка E, которая принадлежит плоскости, проходящей через вершину A и центры граней $A_1B_1C_1D_1$ и BB_1C_1C?

18) Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, где AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 – боковые ребра. Найти площадь пятиугольника, который получается в сечении этого куба плоскостью, проходящей через вершину A и середины ребер B_1C_1 и C_1D_1. Ребро куба равно I.

19) Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, где AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 – боковые ребра. Найти площадь шестиугольника, который получается в сечении этого куба плоскостью, проходящей через центр куба и середины ребер AB и BC. Ребро куба равно I.

20) Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, где AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 – боковые ребра. В каком отношении делит объем куба плоскость, проходящая через вершину A, середину ребра BC и центр грани DCC_1D_1?

21) Из основания высоты правильной треугольной пирамиды опущен перпендикуляр на боковую грань, равный a. Определить объем пирамиды, если угол наклона бокового ребра к плоскости основания равен α.

22) Из основания высоты правильной треугольной пирамиды опущен перпендикуляр на боковое ребро, равный ρ. Найти объем пирамиды, если двугранный угол между ее боковыми гранями равен α.

23) Из основания высоты правильной треугольной пирамиды на ее боковую грань опущен перпендикуляр, равный a. Найти объем пирамиды, если плоский угол при вершине этой пирамиды равен α.

24) Из основания высоты правильной треугольной пирамиды опущен перпендикуляр на боковое ребро, равный ρ. Найти объем пирамиды, если двугранный угол между боковой гранью и основанием пирамиды равен α.

25) Из основания высоты правильной треугольной пирамиды опущен перпендикуляр на боковое ребро, равный ρ, и перпендикуляр на боковую грань, равный a. Найти объем пирамиды.

26) В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$. Боковое ребро $SA=h$ перпендикулярно плоскости прямоугольника, а противоположное боковое ребро SC образует со сторонами прямоугольника углы $\angle SCB=\alpha$ и $\angle SCD=\beta$. Найти объем пирамиды.

27) Основанием пирамиды служит квадрат. Две боковые грани перпендикулярны к плоскости основания, две другие составляют с ней углы, равные α. Чему равен двугранный угол между этими последними гранями ?

28) Основанием четырехугольной пирамиды $OABCE$ является прямоугольник $ABCE$, а высота, опущенная из вершины O на основание, проходит через точку пересечения диагоналей основания. Плоские углы AOB и BOC равны соответственно φ и ψ, а высота пирамиды равна h. Найти объем пирамиды.

29) Основанием четырехугольной пирамиды $OABCE$ является ромб, а высота, опущенная из вершины на основание, проходит через точку пересечения диагоналей основания. Двугранные углы, прилегающие к ребрам OA и OC, равны α, а двугранные углы, прилегающие к ребрам OB и OE равны β. Высота пирамиды равна l. Определить объем пирамиды.

30) Высота трехгранной пирамиды $OABC$, опущенная на основание ABC, проектируется в точку P, лежащую внутри треугольника ABC. Найти объем этой пирамиды, если известно, что пирамиды $OABP$, $OBCP$, $OCAP$ равновелики и что величины отрезков AP, BP, CP и OP равны соответственно a, b, c и d.

31) Правильная треугольная пирамида рассечена плоскостью, параллельной основанию, так, что боковая поверхность делится пополам. В каком отношении делится объем ?

32) Дана правильная треугольная пирамида с двугранными углами φ при основании. Найти длину отрезка, соединяющего середину стороны основания с серединой противолежащего ребра, если сторона основания равна a.

33) Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно a, а угол между боковыми гранями равен φ. Найти сторону основания.

34) В правильной четырехугольной пирамиде $PABCD$ с вершиной P сторона основания равна a, а угол наклона боковой грани к основанию равен φ. В этой пирамиде проводится секущая плоскость, которая делит пополам двугранный угол при ребре CD. Найти длину отрезка, по которому эта плоскость пересекается с гранью .

35) Сторона большего основания правильной четырехугольной усеченной пирамиды, равна a. Основание образует с боковой гранью угол α, а с плоскостью, проходящей через противолежащие стороны верхнего и нижнего оснований, угол β. Найти боковую поверхность пирамиды.

36) Через одну из сторон основания правильной прямой трехгранной призмы проведена плоскость под углом α к основанию, отсекающая от призмы пирамиду объема V. Определить площадь сечения.

37) В правильной четырехугольной пирамиде точка P лежит на высоте и делит ее в отношении I:3, считая от основания. Расстояние от P до бокового ребра равно a, а до боковой грани b. Определить площадь поверхности пирамиды.

38) В правильной четырехугольной пирамиде через вершину при основании проведена плоскость, перпендикулярная боковому

ребру . Определить площадь сечения, если ребро при основании равно I, а боковое ребро равно 2.

39) От правильной четырехугольной пирамиды отсечена другая пирамида плоскостью, проходящей через ребро AB основания. Отношение боковых поверхностей этих пирамид равно 2. Определить отношение площадей треугольников, на которые разбивается проведенным сечением грань, противоположная ребру AB.

40) В шар вписан прямой круговой цилиндр. Во сколько раз объем шара больше объема цилиндра, если известно, что отношение радиуса шара к радиусу основания цилиндра вдвое меньше, чем отношение поверхности шара к боковой поверхности цилиндра?

4I) В прямой круговой конус вписан шар, поверхность которого равна площади основания конуса. В каком отношении боковая поверхность конуса делится линией касания шара и конуса ?

42) Шар вписан в усеченный конус. Доказать, что площадь поверхности шара меньше боковой поверхности конуса.

43) Середина высоты прямого конуса, с образующей ℓ и углом при вершине α , принята за центр шара, проходящего через вершину. Определить радиус круга, получившегося в результате пересечения указанных выше конуса и шара.

44) В коническую поверхность с углом осевого сечения α вписан шар. Определить отношение объемов конусов, основаниями которых являются плоскости, перпендикулярные оси вращения конуса и касающиеся шара.

45) Радиус основания прямого кругового конуса равен R, а высота $-h$. В конус вписан цилиндр. Какое наибольшее значение может иметь боковая поверхность цилиндра ?

46) Две перпендикулярные образующие прямого кругового конуса делят окружность основания в отношении I:2 .Найти объем конуса, если его высота равна h .

47) На плоскости стоят прямой круговой конус и вертикальный штатив (отрезок). Радиус основания конуса равен I м,

высота конуса 2 м; высота штатива 4 м. На вершине штатива помещен точечный источник света. Найти площадь тени, отбрасываемой на плоскость конусом (не считая площади его основания).

48) На горизонтальной плоскости лежат четыре шара радиуса r и попарно касаются. Сверху в лунку, образованную этими шарами, положен пятый шар того же радиуса r. Найти расстояние от самой верхней точки пятого шара до плоскости.

49) В прямой параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$, основание которого ромб $ABCD$ с острым углом α, вписан шар диаметра d, касающийся всех граней. Найти площадь сечения $ABD'C'$ параллелепипеда.

50) В четырехугольную пирамиду $PABCD$ вписан шар, касающийся всех ее граней. Основанием пирамиды является равнобочная трапеция $ABCD$ с боковой стороной $AB = \ell$ и острым углом φ, а боковые грани APD и BPC - равнобедренные треугольники $(AP=PD, BP=PC)$, образующие с основанием пирамиды один и тот же угол α. Найти радиус вписанного шара.

51)Вокруг сферы описана четырехугольная усеченная пирамида. Доказать, что объемы пирамиды и шара относятся как их полные поверхности.

52) Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, боковые стороны которого равны b; соответствующие им боковые грани перпендикулярны к плоскости основания и образуют между собою угол α. Угол между третьей боковой гранью и плоскостью основания также равен α. Найти радиус вписанного в пирамиду шара.

53) Найти объем правильной треугольной пирамиды, зная, радиус r вписанного в нее шара и угол наклона α ее боковой грани к основанию.

54) У правильной треугольной пирамиды отношение радиусов описанного и вписанного шаров равно 3. Найти отношение объема этой пирамиды к объему вписанного шара.

55) В треугольной пирамиде две грани – равносторонние треугольники со стороной a, а две другие грани – равнобедренные прямоугольные треугольники. Определить радиус шара, вписанного в пирамиду.

56) Сторона правильного тетраэдра равна a. Определить радиус шара, касающегося боковых граней в точках, лежащих на сторонах основания.

57) В правильный тетраэдр, ребро которого равно I, вписано полушарие так, что три грани тетраэдра касаются его сферической поверхности, а четвертая служит ему диаметральной плоскостью. Определить полную поверхность полушария.

58) Вокруг шара радиуса r описана правильная усеченная четырехугольная пирамида, апофема которой равна a. Найти ее боковую поверхность.

59) Радиус шара равен R. Из точки A удаленной от центра на расстоянии ℓ, проведены к шару n касательных так, что все плоские углы многогранного угла при вершине A равны между собой. Определить расстояние между точками касания двух соседних лучей и угол между этими лучами.

60) Радиус окружности, описанной около основания правильной n – угольной пирамиды, равен r, а боковое ребро этой пирамиды образует с плоскостью основания угол α. Определить расстояние от плоскости основания пирамиды до центра описанного шара.

6I) В шар радиуса a вписан правильный тетраэдр. Найти объем этого тетраэдра.

62) Осевое сечение конуса – две взаимно перпендикулярные прямые. На одной и той же образующей конуса взяты точки A и B на расстоянии a друг от друга. На поверхности конуса взяты еще две точки C и D такие, что $ABCD$ – правильный тетраэдр. Найти расстояние от вершины конуса до ребра CD этого тетраэдра.

63) Угол осевого сечения конуса равен α. Найти ребро правильного тетраэдра, одна вершина которого лежит в центре основания конуса, а остальные – на боковой поверхности конуса. Радиус основания конуса равен a.

64) Найти объем конуса, вписанного в правильную треугольную пирамиду с боковым ребром ℓ и плоским углом α при вершине.

65) Около прямого кругового конуса, высота которого равна радиусу основания, описана пятиугольная пирамида. Ее полная поверхность в два раза больше полной поверхности конуса. Найти объем пирамиды, если боковая поверхность конуса равна $\pi\sqrt{2}$.

66) Основание пирамиды – прямоугольный треугольник, а боковые грани, проходящие через катеты, составляют с основанием углы 30^0 и 60^0. Около пирамиды описан прямой круговой конус (вершина конуса совпадает с вершиной пирамиды). Найти объем конуса, если высота пирамиды равна h.

Задачи по стереометрии, предлагавшиеся на вступительных экзаменах в 1965 г. имеются среди задач, опубликованных в сборнике " Математическая школа " Ш, стр. 10-14.

О ПРИЕМЕ В ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ В 1965 году

Беседа с председателем экзаменационной комиссии профессором Ю.В. СИДОРОВЫМ

Физико-технический институт проводил в 1965 году прием на пять факультетов: радиотехники и кибернетики, общей и прикладной физики, физической и квантовой электроники, аэрофизики и прикладной математики, химической и молекулярной физики. Кроме того, в 1965 г. открылся филиал института при ЦАГИ (г.Жуковский), который является, по существу, шестым - " летательным " факультетом физико-технического института.

Конкурс проводился по четырем экзаменам: устный и письменный экзамены по математике и по физике. Кроме того, поступающие писали сочинение. Проходной бал был на всех факультетах различным. При прочих равных условиях предпочтение отдавалось лицам, имеющим стаж, медалистам, школьникам, успешно участвовавшим в различных математических и физических олимпиадах и т.п. Медалисты, получившие отличные оценки по математике и физике, освобождались от экзамена по русскому языку и литературе. К сожалению, этим правилом приходилось пользоваться не слишком часто.

Экзамены проводились в три потока .

Абитуриенты, подавшие заявления до I-го июля , сдавали экзамены в первом потоке (начало экзаменов - первого июля). Второй поток сдавал первый экзамен 5-го июля, третий поток начал экзамены IO-го июля. Следует отметить, что первый поток был самым малочисленным, а третий - самым многочисленным. Это обстоятельство несколько осложнило работу приемной комиссии. По понятным причинам экзамены первого потока проходили в более спокойной обстановке, хотя, конечно, уровень требований был одним и тем же для всех потоков. Для письменного экзамена по математике было подготовлено двенадцать вариантов - по четыре на каждый поток. В каждом варианте было по 4 задачи, на их решение отводилось

5 часов. Проверка работ и их оценка проводились, в общем, по тем же правилам, что и на механико-математическом факультете МГУ. (см. об этом заметку " О приеме на мех.мат. МГУ в 1965г." ,сборник " Математическая школа " VI).

То же самое относится и к письменному экзамену по физике. Устные экзамены по математике и физике проводились по стандартным правилам.

В заключении приводятся два типичных варианта письменной работы по математике и наиболее интересные и трудные задачи из оставшихся вариантов. Более подробные сведения об институте и условиях приема можно получить , написав письмо в приемную комиссию института. В самом институте можно приобрести сборники подготовительных задач.

Билет № 7

I. Решить уравнение:

$$1+2\cos x\,(1+\sin 2x)=\sin 2x-\cos 2x$$

2. В параллелограмме отношение сторон и отношение диагоналей одинаковы и равны $1/2$. Из вершины тупого угла A опущена высота AE на большую сторону CD . Найти отношение длины отрезка DE к длине CE .

3. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} xyz+xz^2=2 \\ xy+2xz=-2 \\ x^2yz=-15. \end{cases}$$

4. Ребро куба $ABCDA'B'C'D'$ равно a . Найти радиус сферы, проходящей через середины ребер AA', BB' и через вершины A и C' .

Билет № 9

I. Решить уравнение:

$$2+4\cos 4x = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$$

2. Найти площадь параллелограмма, если его большая диагональ 5 см., а высоты 2 см и 3 см.

3. Найти вещественные решения системы:

$$\begin{cases} x^2+2yz=1 \\ y^2+2zx=2 \\ z^2+2xy=1 \end{cases}$$

4. В треугольной призме $ABCA'B'C'$ боковое ребро равно ℓ. В основании призмы лежит правильный треугольник со стороной b, а прямая, проходящая через вершину B' и центр основания ABC, перпендикулярна основаниям. Найти площадь сечения, проходящего через ребро BC и середину ребра AA'.

СИСТЕМЫ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ:

I.

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ xy+yz+zx=-4 \\ x^3+y^3+z^3=1 \end{cases}$$

2. $$2x^2+y^2+z^2=9+yz$$
$$x^2+2y^2+z^2=6+xz$$
$$x^2+y^2+2z^2=3+xy.$$

3. $$x+y=z$$
$$y^2+z^2=13x^2$$
$$2(x^3+z^3)=7y^3$$

4. $$(x^3+1)(y^3+1)=18$$
$$xy+x+y=5.$$

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ:

I. $\operatorname{ctg} x+\operatorname{ctg} 3x=\operatorname{tg} 2x$

2. $\sin^2 x+\cos^2 2x=\sin^2 3x+\cos^2 4x.$

3. $\sin^3 x+\cos^3 x+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2x\cdot\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos x+\sin 3$

ЗАДАЧИ ПО ПЛАНИМЕТРИИ И СТЕРЕОМЕТРИИ:

3. На сторонах прямоугольного треугольника с катетами a и b построены квадраты, лежащие вне треугольника. Найти площадь треугольника с вершинами в центрах квадратов.

I. В правильном треугольнике ABC со стороной a проведена средняя линия MN параллельно AC. Через точку A и середину MN проведена прямая до пересечения с BC в точке D. Найти длину AD.

3. В треугольной пирамиде периметр основания равен $2p$, радиус вписанного шара равен R, а боковые грани образуют с основанием равные углы α. Найти объем пирамиды.

4. В правильную треугольную усеченную пирамиду с боковым ребром ℓ можно поместить шар, касающийся всех граней и шар, касающийся всех ребер пирамиды. Найти длины сторон оснований пирамиды.

3. Ребро куба равно b. Найти объем конуса, у которого вершина совпадает с вершиной A куба, а окружность основания проходит через центры граней куба, не проходящих через вершину A.

Л-45196. Подписано в печать 18/Ш-66г. Форм. 60x90 1/16
Печ.л. 3,75. Уч.-изд.л. 2,85. Зак. 1686. Тираж 2000. Цена 8 коп.

Отпечатано в типографии МГУ. Москва. Ленинские горы.